第 61 卷　第 5 期　　中山大学学报（自然科学版）（中英文）　　Vol. 61　No. 5
2022 年　9 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Sept.　2022

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2020A075

关于商高数的Jeśmanowicz猜想*

管训贵

泰州学院数理学院，江苏 泰州 225300

摘　要：研究了商高数的Jeśmanowicz猜想的正整数解问题。利用数论中的一些方法，证明了当$(a,b,c)=(2k+1,2k(k+1),2k(k+1)+1)$（$k$是正整数）时，对任意正整数$n$，丢番图方程$(an)^x+(bn)^y=(cn)^z$在一定条件下除了$x=y=z=2$外没有其他正整数解，从而得到Jeśmanowicz猜想在该类情形下的正确性。

关键词：Jeśmanowicz猜想；丢番图方程；正整数解；同余

中图分类号：O156. 7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2097－0137（2022）05－0181－10

The Jeśmanowicz' conjecture on Pythagorean triples

GUAN Xungui

School of Mathematics and Physics, Taizhou University, Taizhou 225300, China

Abstract: The positive integer solutions of the Jeśmanowicz' conjecture on Pythagorean triples are studied. By using some methods of number theory, under some conditions, for any positive integer n, the Diophantine equation $(an)^x+(bn)^y=(cn)^z$ has no positive integer solutions other than $x=y=z=2$, when $(a,b,c)=(2k+1,2k(k+1),2k(k+1)+1)$, where k is a positive integer. The result is still the confirmation of Jeśmanowicz' conjecture.

Key words: Jeśmanowicz' conjecture; Diophantine equation; positive integer solution; congruence

设$\mathbf{N}^*$, $\mathbf{N}$是全体正整数和非负整数的集合，a,b,c为互素的正整数满足$a^2+b^2=c^2$. 若$2|b$，则a,b,c可表成

$$a=u^2-v^2,\quad b=2uv,\quad c=u^2+v^2,$$

这里$u,v\in\mathbf{N}^*$，$u>v$，$\gcd(u,v)=1$，$2\nmid(u+v)$.

1956年，Jeśmanowicz[1]曾猜测：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，丢番图方程

$$(an)^x+(bn)^y=(cn)^z,\quad x,y,z\in\mathbf{N}^* \tag{1}$$

仅有解$x=y=z=2$. 这是至今远未解决的数论难题。目前的结果大多集中在$n=1$的情形，而对于$n>1$，只有为数不多的情形被解决[2-14]。其中一类典型的丢番图方程是$a=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$，$c=b+1$的情形。此时

$$a=2k+1,\quad b=2k(k+1),\quad c=2k(k+1)+1,\quad k\in\mathbf{N}^*. \tag{2}$$

1998年，邓谋杰等[3]在假定a是素数方幂的前提下研究了这类情形，并证明了当$(a,b,c)=(3,4,5)$，$(5,12,13)$，$(7,24,25)$，$(9,40,41)$和$(11,60,61)$，即式(2)中$k=1,2,3,4,5$时，方程(1)仅有解$x=y=z=2$.

1999年，邓谋杰[4]又证明了当$(a,b,c)=(13,84,85)$，即式(2)中$k=6$时，方程(1)仅有解$x=y=z=2$.

2021年，管训贵[6]证明了当$(a,b,c)=(19,180,181)$，即式(2)中$k=9$时，方程(1)仅有解

* **收稿日期**：2020－12－22　　**录用日期**：2021－03－18　　**网络首发日期**：2022－03－10

基金项目：国家自然科学基金(11471144)；江苏省自然科学基金(BK20171318)；云南省教育厅科学研究基金(2019J1182)；泰州学院教博基金(TZXY2018JBJJ002)

作者简介：管训贵(1963年生)，男；**研究方向**：数论；E-mail：tzszgxg@126. com

$x = y = z = 2.$

本文给出以下一般性的结果。（约定文中(*|*)表示Legendre符号）

定理1 设a, b, c由式(2)给出，且$a = p^l$(p为奇素数,$l \in \mathbf{N}^*$)，则方程(1)没有适合$y > z > x$以及$n > 1$的解(x, y, z, n)；若$b = ef$，$e, f \in \mathbf{N}^*$，$\gcd(e, f) = 1$，$2|e$，$2\nmid f$，$L = e$或f，$\prod_{i=1}^{l} q_i^{r_i}$为$b$的标准分解式，且有下列条件之一成立，则方程(1)也没有适合$x > z > y$以及$n > 1$的解(x, y, z, n)：

（i）$z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$；

（ii）$(c|p) = (e|p) = -1$，f的某一素因子的方幂为奇数，或$(c|p) = (f|p) = -1$，e的某一素因子的方幂为奇数；

（iii）$L = m^2$（$m \in \mathbf{N}^*$），$z \equiv 0 \pmod 2$；

（iv）$L = m^3$（$m \in \mathbf{N}^*$），$p \equiv 2 \pmod 3$，$z \equiv 0 \pmod 3$；

（v）$x \equiv y \equiv 0 \pmod 2$，$c = \xi^2 + \eta^2 (\xi, \eta \in \mathbf{N}^*$，$\gcd(\xi, \eta) = 1$，$2|\xi)$，$e(f)$中某一素因子$Q$的方幂大于$\xi(\eta)$中$Q$的方幂，或$pf(pe)$中不含$\eta(\xi)$的某一个素因子。

于是在条件(i)~(v)之一成立的情况下，对任意$n \in \mathbf{N}^*$，方程(1)仅有解$x = y = z = 2.$

推论1 当式(2)中$k = 8, 11, 12, 13, 14$时，方程(1)仅有解$x = y = z = 2.$

1 几个引理

引理1[7] 方程(1)适合$(x, y, z) \neq (2, 2, 2)$以及$n > 1$的解(x, y, z, n)必满足下列条件之一：

(i) $\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$； (ii) $x > z > y$； (iii) $y > z > x.$

引理2[13] 方程(1)没有适合$\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$以及$n > 1$的解$(x, y, z, n).$

引理3[15] 若(a, b, c)由式(2)给出且$n = 1$，则方程(1)仅有解$x = y = z = 2.$

设$1 < m \in \mathbf{N}^*$，$\gcd(a, m) = 1$，h是使$a^h \equiv 1 \pmod m$成立的最小正整数，则称h为a关于模m的阶。

引理4[16] 设a关于模m的阶为h，则$c^z \equiv 1 \pmod m$成立的充要条件是$h|z.$

引理5[17] 设r是大于1的奇数，则方程

$$X^2 + Y^2 = Z^r,\quad X, Y, Z \in \mathbf{N}^*,\quad \gcd(X, Y) = 1,\quad 2|Y \tag{3}$$

的解(X, Y, Z)都可表示成

$$X + Y\sqrt{-1} = \lambda_1(X_1 + \lambda_2 Y_1\sqrt{-1})^r,\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \{-1, 1\},$$
$$Z = X_1^2 + Y_1^2,\quad X_1, Y_1 \in \mathbf{N}^*,\quad \gcd(X_1, Y_1) = 1,\quad 2|X_1Y_1.$$

引理6 方程(3)满足条件的解(X, Y, Z)为

$$X = B\left|\sum_{i=0}^{(r-1)/2}(-1)^i\binom{r}{2i}B^{r-2i-1}A^{2i}\right|,\quad Y = A\left|\sum_{i=0}^{(r-1)/2}(-1)^i\binom{r}{2i+1}A^{r-2i-1}B^{2i}\right|,\quad Z = A^2 + B^2,$$

这里$A, B \in \mathbf{N}^*$，$\gcd(A, B) = 1$，$2|A.$

2 定理1的证明

情形1 设方程(1)有适合$y > z > x$以及$n > 1$的解(x, y, z, n)，则方程(1)可改写成

$$a^x = n^{z-x}(c^z - b^y n^{y-z}). \tag{4}$$

由于$z > x$，$a = p^l$，故$\gcd(n, p) > 1$. 设$n = p^u n_1$，这里$u \geqslant 1$，$\gcd(n_1, p) = 1$，此时式(4)成为

$$p^{lx} = p^{u(z-x)} n_1^{z-x}(c^z - b^y p^{u(y-z)} n_1^{y-z}).$$

由此可见$n_1 = 1$且$lx = u(z - x)$，故有

$$b^y p^{u(y-z)} = c^z - 1. \tag{5}$$

情形1.1 $p \equiv 3, 5 \pmod 8$.

由$a = p^l = 2k + 1$知，$k = \frac{1}{2}(p^l - 1)$. 此时

$$c = (p^l - 1)\cdot\frac{p^l + 1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(p^{2l} + 1),$$

故$(2\big|p)(c\big|p)=(2c\big|p)=(p^{2l}+1\big|p)=1$. 当$p\equiv 3,5\pmod 8$时，$(2\big|p)=-1$，所以$(c\big|p)=-1$.

对式(5)取模p，有$c^z\equiv 1\pmod p$，故$1=(c\big|p)^z=(-1)^z$，得$z\equiv 0\pmod 2$. 此时$(c^2-1)\big|(c^z-1)$，从而有$(c+1)\big|(c^z-1)$. 因为$c+1=\dfrac{1}{2}(p^{2l}+3)\equiv 2\pmod 4$，所以$2\|(c+1)$.

当$p=3$时，$3\|(c+1)$. 若$l=1$，则$k=1$，由文献[3]的证明知，式(5)不成立。若$l>1$，则由$c+1>6$知，存在奇素数$q>3$，使得$q\big|(c+1)$，于是$q\big|(c^z-1)$. 又由$\gcd(b,c+1)=\gcd(b,b+2)=\gcd(b,2)=2$知，$\gcd(b,q)=1$，故$q\nmid b^y 3^{u(y-z)}$. 因此式(5)不成立。

当$p\neq 3$时，$p\nmid(c+1)$，即$p\nmid\dfrac{c+1}{2}$，且$\gcd\left(b,\dfrac{c+1}{2}\right)=1$，故$pb\nmid(c^z-1)$. 因此式(5)不成立。

情形1.2　$p\equiv 1,7\pmod 8$，c关于模p的阶h为偶数。

对式(5)取模p，得$c^z\equiv 1\pmod p$. 根据引理4，有$h|z$，所以$z\equiv 0\pmod 2$. 由情形1.1的讨论知，式(5)不成立。

情形1.3　$p\equiv 1,7\pmod 8$，c关于模p的阶h为奇数。

此时仍有$h|z$，故$z=ht\ (t\in\mathbf{N}^*)$. 若$t=1$，则式(5)成为$b^y p^{u(y-z)}=c^h-1$，即

$$c^{h-1}+\cdots+c+1=b^{y-1}p^{u(y-z)}.$$

两边同取模b，可得$h\equiv 0\pmod b$. 但这与$2|b$且$2\nmid h$矛盾。因此$t>1$. 于是有奇素数q，满足$t=qt_1$ $(t_1\in\mathbf{N}^*)$. 此时$z=ht_1q$，且式(5)可化为

$$b^y p^{u(y-z)}=(c^{ht_1}-1)\cdot\frac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}.$$

易知，$\gcd\left(c^{ht_1}-1,\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}\right)=1$或$q$.

当$\gcd\left(c^{ht_1}-1,\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}\right)=1$时，由于$pb\big|(c^{ht_1}-1)$，所以存在$1<m\in\mathbf{N}^*$，使得$m\left|\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}\right.$以及$m\nmid pb$，说明式(5)不成立。

当$\gcd\left(c^{ht_1}-1,\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}\right)=q$时，记$\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}=qM\,(M\in\mathbf{N}^*)$. 由$(c^{ht_1})^{q-1}+\cdots+c^{ht_1}+1>q$知$M>1$. 若$q\nmid M$，则存在$1<m\in\mathbf{N}^*$，使得$m|M$，从而$m\left|\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}\right.$，但$m\nmid pb$，说明式(5)不成立。若$q|M$，不妨设$M=qM_1\ (M_1\in\mathbf{N}^*)$，则有$\dfrac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}=q^2M_1$，即$(c^{ht_1})^q-1=q^2M_1(c^{ht_1}-1)$. 根据Fermat小定理，$(c^{ht_1})^q\equiv c^{ht_1}\pmod q$，故$c^{ht_1}-1\equiv 0\pmod q$. 令$c^{ht_1}-1=qM_2(M_2\in\mathbf{N}^*)$，则

$$\frac{(c^{ht_1})^q-1}{c^{ht_1}-1}=\frac{(1+qM_2)^q-1}{qM_2}=\sum_{i=1}^{q}\binom{q}{i}(qM_2)^{i-1},$$

即

$$\sum_{i=1}^{q}\binom{q}{i}(qM_2)^{i-1}=q^2M_1. \tag{6}$$

下面比较式(6)两边含q的最高方幂。由$q\left|\dbinom{q}{i}\right.$ $(1\leqslant i\leqslant q-1)$ 得$\displaystyle\sum_{i=1}^{q}\binom{q}{i}(qM_2)^{i-1}\equiv q\pmod{q^2}$，则式(6)左边$q$的最高方幂为1，但右边$q$的最高方幂大于1，矛盾。因此式(6)不成立，从而式(5)不成立。

综上，在定理1的条件下，方程(1)没有适合$y>z>x$以及$n>1$的解(x,y,z,n).

情形2　设方程(1)有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n)，则方程(1)可改写成

$$b^y=n^{z-y}(c^z-a^x n^{x-z}). \tag{7}$$

由于$z>y$，故$\gcd(n,b)>1$. 又b的标准分解式为$b=\prod\limits_{i=1}^{l}q_i^{r_i}$，因此可设$n=\prod\limits_{i=1}^{l}q_i^{s_i}\cdot n_1$，这里$s_i\in\mathbf{N}$，$i=$

$1,\cdots,l$，$s_1+\cdots+s_l>0$，$\gcd(n_1,q_1,\cdots,q_l)=1$，则式(7)成为

$$\prod_{i=1}^{l}q_i^{r_iy}=\prod_{i=1}^{l}q_i^{s_i(z-y)}\cdot n_1^{z-y}(c^z-a^x\prod_{i=1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}\cdot n_1^{x-z}). \tag{8}$$

由式(8)可知$n_1=1$，且有

$$c^z-a^x\prod_{i=1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}=\prod_{i=1}^{l}q_i^{r_iy-s_i(z-y)}. \tag{9}$$

当$l=1$时，$s_1>0$. 此时由式(9)得$r_1y=s_1(z-y)$，且有

$$a^xq_1^{s_1(x-z)}=c^z-1. \tag{10}$$

由情形1的讨论知，式(10)不成立。下设$l>1$.

若$s_1>0$，$\cdots$，$s_l>0$，则由式(9)得$r_iy=s_i(z-y)$（$i=1,\cdots,l$），且有

$$a^x\prod_{i=1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}=c^z-1. \tag{11}$$

由情形1的讨论知，式(11)不成立。

若$s_1,\cdots,s_l$不全为0，不妨设$s_1=\cdots=s_k=0$，$s_{k+1}>0,\cdots$，$s_l>0$，这里$k\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant k<l$，则由式(9)得$r_iy=s_i(z-y)$（$i=k+1,\cdots,l$），且有

$$a^x\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}=c^z-(\prod_{i=1}^{k}q_i^{r_i})^y. \tag{12}$$

记$\prod_{i=1}^{k}q_i^{r_i}=L$.

情形2.1 $z\equiv y\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$.

此时可令$z=2z_1$，$y=2y_1$，则式(12)成为

$$a^x\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}=(c^{z_1}+L^{y_1})(c^{z_1}-L^{y_1}).$$

注意到$\gcd(c^{z_1}+L^{y_1},c^{z_1}-L^{y_1})=1$或2，有$a^x\big|(c^{z_1}+L^{y_1})$，或$a^x\big|(c^{z_1}-L^{y_1})$. 又由$b=\prod_{i=1}^{l}q_i^{r_i}>L$，从而

$$a^x>a^z=a^{2z_1}=(c+b)^{z_1}>c^{z_1}+b^{z_1}>c^{z_1}+L^{y_1}>c^{z_1}-L^{y_1}.$$

这产生矛盾，因此式(12)不成立。

情形2.2 $(c\big|p)=(e\big|p)=-1$，f的某一素因子的方幂为奇数；或$(c\big|p)=(f\big|p)=-1$，e的某一素因子的方幂为奇数。

此时对式(12)取模p知，$(c\big|p)^z=(L\big|p)^y$，即$(-1)^z=(-1)^y$，这说明z,y同奇同偶。假定$z\equiv y\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$，则对任意$i$（$i=k+1,\cdots,l$），由$r_iy=s_i(z-y)$知$2\big|r_i$，与条件(v)矛盾，故$z\equiv y\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$. 再由条件(iv)知，式(12)不成立。

情形2.3 $L=m^2$（$m\in\mathbf{N}^*$），$z\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$.

此时可令$z=2z_1$，则式(12)成为

$$a^x\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}=(c^{z_1}+m^y)(c^{z_1}-m^y).$$

注意到$\gcd(c^{z_1}+m^y,c^{z_1}-m^y)=1$或2，有$a^x\big|(c^{z_1}+m^y)$，或$a^x\big|(c^{z_1}-m^y)$. 又由$b=\prod_{i=1}^{l}q_i^{r_i}>m^2$，则

$$a^x>a^z=a^{2z_1}=(c+b)^{z_1}>(c+m^2)^{z_1}>c^{z_1}+m^{2z_1}>c^{z_1}+m^y>c^{z_1}-m^y.$$

从而产生了矛盾。

情形2.4 $L=m^3(m\in\mathbf{N}^*)$，$p\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，$z\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

此时可令$z=3z_1$，则式(12)成为

$$a^x\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{s_i(x-z)}=(c^{z_1}-m^y)(c^{2z_1}+c^{z_1}m^y+m^{2y}).$$

注意到$\gcd(c^{z_1}-m^y,c^{2z_1}+c^{z_1}m^y+m^{2y})=1$或3，有$a^x\big|(c^{z_1}-m^y)$，或$a^x\big|(c^{2z_1}+c^{z_1}m^y+m^{2y})$.

若$a^x\big|(c^{z_1}-m^y)$，则由情形2.2的讨论知这是不可能的。

若$a^x\big|(c^{2z_1}+c^{z_1}m^y+m^{2y})$，则$(2c^{z_1}+m^y)^2\equiv -3m^{2y}(\bmod p)$，由Legendre符号的性质得

$$1=(-3m^{2y}\big|p)=(-3\big|p)=-1,$$

矛盾。

情形2.5　$x\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$，$c=\xi^2+\eta^2$（$\xi,\eta\in\mathbf{N}^*$，$\gcd(\xi,\eta)=1$，$2\big|\xi$），$e(f)$中某一素因子$Q$的方幂大于$\xi(\eta)$中$Q$的方幂，或$pf(pe)$中不含$\eta(\xi)$的某一个素因子。

当$L=e$时，假定$z\equiv 1(\bmod 2)$，则由$r_iy=s_i(z-y)$ $(i=k+1,\cdots,l)$知，$s_i\equiv 0(\bmod 2)(i=k+1,\cdots,l)$. 令$x=2x_1$，$s_i=2t_i$（$i=k+1,\cdots,l$），$y=2y_1$，则式(12)成为

$$\Big(p^{lx_1}\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{t_i(x-z)}\Big)^2+(e^{y_1})^2=(\xi^2+\eta^2)^z,\qquad 2\nmid z\eta\,. \tag{13}$$

根据引理6，式(13)给出

$$e^{y_1}=\xi\left|\sum_{i=0}^{(z-1)/2}(-1)^i\binom{z}{2i+1}\xi^{z-2i-1}\eta^{2i}\right|, \tag{14}$$

或

$$p^{lx_1}\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{t_i(x-z)}=\eta\left|\sum_{i=0}^{(z-1)/2}(-1)^i\binom{z}{2i}\eta^{z-2i-1}\xi^{2i}\right|. \tag{15}$$

由于e中素因子Q的方幂大于ξ中Q的方幂，故式(14)不成立；又由于pf中不含η的某一个素因子，故式(15)也不成立，从而式(13)不成立。

当$L=f$时，假定$z\equiv 1(\bmod 2)$，则式(12)成为

$$\Big(p^{lx_1}\prod_{i=k+1}^{l}q_i^{t_i(x-z)}\Big)^2+(f^{y_1})^2=(\xi^2+\eta^2)^z,\qquad 2\nmid z\eta. \tag{16}$$

完全类似式(13)的讨论知，若f中素因子Q的方幂大于η中Q的方幂，或pe中不含ξ的某一个素因子，则式(16)不成立。于是$z\equiv 0(\bmod 2)$，得$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$. 再由条件(iv)知，式(12)不成立。

综上，在定理1的条件下，方程(1)没有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 结合情形1、情形2、引理1、引理2和引理3可知，在定理1的条件下，方程(1)仅有解$x=y=z=2$. 定理1得证。

3　推论1的证明

（A）　当$k=8$时，$(a,b,c)=(17,144,145)$. 此时方程(1)成为

$$(17n)^x+(144n)^y=(145n)^z,\qquad x,y,z\in\mathbf{N}^*. \tag{17}$$

易知，方程(17)没有适合$y>z>x$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 设方程(17)有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 由于$b=2^4\cdot 3^2$，故$n=2^r3^s$（$r,s\in\mathbf{N}^*$，$r+s\geqslant 1$），于是方程(17)可化为

$$145^z-17^x2^{r(x-z)}3^{s(x-z)}=2^{4y-r(z-y)}3^{2y-s(z-y)}. \tag{18}$$

当$r=0,s>0$时，由式(18)得$2y=s(z-y)$，且有

$$17^x3^{s(x-z)}=145^z-16^y. \tag{19}$$

当$r>0,s=0$时，由式(18)得$4y=r(z-y)$，且有

$$17^x2^{r(x-z)}=145^z-9^y. \tag{20}$$

当$r>0,s>0$时，由式(18)得$4y=r(z-y)$，$2y=s(z-y)$，且有

$$17^x2^{r(x-z)}3^{s(x-z)}=145^z-1. \tag{21}$$

根据定理1的条件(iii)，只需证$z\equiv 0(\bmod 2)$时，方程(17)没有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n)即可。

若式(19)成立，则对式(19)取模17，有$9^z\equiv(-1)^y(\bmod 17)$，即$81^z\equiv 1(\bmod 17)$，得$z\equiv 0(\bmod 4)$，当然有$z\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(20)成立，则对式(20)取模8知，$2^{r(x-z)}\equiv 0(\bmod 8)$，故$r(x-z)\geqslant 3$. 假定$r(x-z)=3$，则$r=1$

或3. 当$r=1$时，$z=5y$. 因$8\,012\,167\,577\mid(145^5-9)$，而$8\,012\,167\,577\nmid 17^x2^{r(x-z)}$，故式(20)不成立。当$r=3$时，$3z=7y$，于是$z=7k, y=3k$，这里$k\in\mathbf{N}^*$. 因$73\mid(145^7-9^3)$，而$73\nmid 17^x2^{r(x-z)}$，故式(20)不成立。从而$r(x-z)\geqslant 4$. 对式(20)取模16，有$1\equiv 9^y\pmod{16}$，得$y\equiv 0\pmod 2$. 对式(20)取模17，有$9^z\equiv 9^y\pmod{17}$，即$9^{z-y}\equiv 1\pmod{17}$，得$z-y\equiv 0\pmod 8$，故$z\equiv y\equiv 0\pmod 2$.

若式(21)成立，则对式(21)取模17，有$9^z\equiv 1\pmod{17}$，得$z\equiv 0\pmod 8$，当然有$z\equiv 0\pmod 2$.

因此方程(17)仅有解$x=y=z=2$.

（B） 当$k=11$时，$(a,b,c)=(23,264,265)$. 此时方程(1)成为

$$(23n)^x+(264n)^y=(265n)^z,\quad x,y,z\in\mathbf{N}^*. \tag{22}$$

易知，方程(22)没有适合$y>z>x$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 设方程(22)有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 由于$b=2^3\cdot 3\cdot 11$，故$n=2^r3^s11^t$（$r,s,t\in\mathbf{N}^*$，$r+s+t\geqslant 1$），于是方程(22)可化为

$$265^z-23^x2^{r(x-z)}3^{s(x-z)}11^{t(x-z)}=2^{3y-r(z-y)}3^{y-s(z-y)}11^{y-t(z-y)}. \tag{23}$$

当$r=s=0, t>0$时，由式(23)得$y=t(z-y)$，且有

$$23^x11^{t(x-z)}=265^z-24^y. \tag{24}$$

当$r=t=0, s>0$时，由式(23)得$y=s(z-y)$，且有

$$23^x3^{s(x-z)}=265^z-88^y. \tag{25}$$

当$s=t=0, r>0$时，由式(23)得$3y=r(z-y)$，且有

$$23^x2^{r(x-z)}=265^z-33^y. \tag{26}$$

当$r=0, s>0, t>0$时，由式(23)得$y=s(z-y)=t(z-y)$，且有

$$23^x3^{s(x-z)}11^{t(x-z)}=265^z-8^y. \tag{27}$$

当$s=0, r>0, t>0$时，由式(23)得$3y=r(z-y), y=t(z-y)$，且有

$$23^x2^{r(x-z)}11^{t(x-z)}=265^z-3^y. \tag{28}$$

当$t=0, r>0, s>0$时，由式(23)得$3y=r(z-y), y=s(z-y)$，且有

$$23^x2^{r(x-z)}3^{s(x-z)}=265^z-11^y. \tag{29}$$

当$r>0, s>0, t>0$时，由式(23)得$3y=r(z-y), y=s(z-y)=t(z-y)$，且有

$$23^x2^{r(x-z)}3^{s(x-z)}11^{t(x-z)}=265^z-1. \tag{30}$$

根据定理1的条件(i)、(iii)~(v)，只需证式(24)~(26)，(28)~(29)中$z\equiv y\equiv 0\pmod 2$和式(27)中$z\equiv 0\pmod 3$以及式(30)中$z\equiv 0\pmod 2$时，方程(22)没有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n)即可。

若式(24)成立，则对式(24)取模11，有$1\equiv 2^y\pmod{11}$，由Legendre符号的性质得$1=(2|11)^y=(-1)^y$，故$y\equiv 0\pmod 2$. 再对式(24)取模5，有$3^x\equiv(-1)^y\equiv 1\pmod 5$，得$x\equiv 0\pmod 4$. 故$x\equiv y\equiv 0\pmod 2$. 易知$265=12^2+11^2=16^2+3^2$，且24中2的方幂3大于12中2的方幂2，根据定理1的条件(v)，有$z\equiv y\equiv 0\pmod 2$.

若式(25)成立，则对式(25)取模23，有$12^z\equiv 19^y\pmod{23}$，由Legendre符号的性质得$1=(12|23)^z=(19|23)^y=(-1)^y$，故$y\equiv 0\pmod 2$. 对式(25)取模5，有$3^{x+s(x-z)}\equiv -3^y\pmod 5$，由Legendre符号的性质得$(-1)^{x+s(x-z)}=(3|5)^{x+s(x-z)}=(-3^y|5)=1$，故$x$与$s(x-z)$同奇同偶。

对式(25)取模8，有$(-1)^x\cdot 3^{s(x-z)}\equiv 1\pmod 8$. 假定$s(x-z)\equiv 1\pmod 2$，则得$(-1)^x\cdot 3\equiv 1\pmod 8$，不可能。故$x\equiv s(x-z)\equiv 0\pmod 2$. 类似式(24)的讨论知$z\equiv y\equiv 0\pmod 2$.

若式(26)成立，则对式(26)取模23，有$12^z\equiv 10^y\pmod{23}$，由Legendre符号的性质得$1=(12|23)^z=(10|23)^y=(-1)^y$，故$y\equiv 0\pmod 2$. 对式(26)取模8，有$(-1)^x\cdot 2^{r(x-z)}\equiv 0\pmod 8$，得$r(x-z)\geqslant 3$. 假定$r(x-z)=3$，则$r=1$或3.

当$r=1$时，$z=4y$. 此时式(26)成为$23^x2^{x-4y}=265^{4y}-33^y$. 易知$3\,593\mid(265^4-33)$，故$3\,593\mid(265^{4y}-33^y)$，而$3\,593\nmid 23^x2^{x-4y}$，所以式(26)不成立。

当$r=3$时，$z=2y$. 此时式(26)成为$23^x2^{3(x-2y)}=265^{2y}-33^y$. 易知$41\mid(265^2-33)$，故$41\mid(265^{2y}-33^y)$，

而 $41\nmid 23^x 2^{3(x-2y)}$，所以式(26)不成立。于是 $r(x-z)\geqslant 4$. 对式(26)取模16，有 $9^z\equiv 1(\bmod 16)$，得 $z\equiv 0(\bmod 2)$. 故 $z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(27)成立，则对式(27)取模3，有 $1\equiv(-1)^y(\bmod 3)$，得 $y\equiv 0(\bmod 2)$.

当 $s=1$ 时，$z=2y$. 此时式(27)成为 $23^x 3^{x-2y} 11^{t(x-2y)}=265^{2y}-8^y$. 易知 $7\,|\,(265^2-8)$，故 $7\,|\,(265^{2y}-8^y)$，而 $7\nmid 23^x 3^{x-2y} 11^{t(x-2y)}$，所以式(27)不成立。于是 $s\geqslant 2$. 对式(27)取模9，有 $4^z\equiv(-1)^y\equiv 1(\bmod 9)$，得 $z\equiv 0(\bmod 3)$.

若式(28)成立，当 $r=1$ 时，$z=4y$. 此时式(28)成为 $23^x 2^{x-4y} 11^{t(x-4y)}=265^{4y}-3^y$. 易知 $29\,927\,|\,(265^4-3)$，故 $29\,927\,|\,(265^{4y}-3^y)$，而 $29\,927\nmid 23^x 2^{x-4y} 11^{t(x-4y)}$，所以式(28)不成立。于是 $r\geqslant 2$. 对式(28)取模4，有 $1\equiv(-1)^y(\bmod 4)$，得 $y\equiv 0(\bmod 2)$.

假定 $z\equiv 1(\bmod 2)$，则由 $3y=r(z-y), y=t(z-y)$ 知 $r\equiv t\equiv 0(\bmod 2)$.

对式(28)取模5，有 $3^x\cdot 2^{r(x-z)}\equiv -3^y(\bmod 5)$，由Legendre符号的性质得

$$(-1)^x=(-1)^{x+r(x-z)}=(3|5)^x\cdot(2|5)^{r(x-z)}=(-3^y|5)=1,$$

故 $x\equiv 0(\bmod 2)$. 于是 $x\equiv r(x-z)\equiv t(x-z)\equiv 0(\bmod 2)$. 类似式(24)的讨论知

$$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2).$$

若式(29)成立，则对式(29)取模23，有 $12^z\equiv 11^y(\bmod 23)$，由Legendre符号的性质得 $1=(12|23)^z=(11|23)^y=(-1)^y$，故 $y\equiv 0(\bmod 2)$. 假定 $z\equiv 1(\bmod 2)$，则由 $3y=r(z-y), y=s(z-y)$ 知 $r\equiv s\equiv 0(\bmod 2)$.

再对式(29)取模5，有 $3^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)}\equiv -1(\bmod 5)$，由Legendre符号的性质得

$$(-1)^x=(3|5)^x(2|5)^{r(x-z)}\cdot(3|5)^{s(x-z)}=(-1|5)=1,$$

故 $x\equiv 0(\bmod 2)$. 于是 $x\equiv r(x-z)\equiv s(x-z)\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$. 类似式(24)的讨论知

$$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2).$$

若式(30)成立，则对式(30)取模8，有 $23^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} 11^{t(x-z)}\equiv 0(\bmod 8)$，得 $r(x-z)\geqslant 3$. 假定 $r(x-z)=3$，则 $r=1$ 或 3. 仿式(26)的讨论知，式(30)不成立，故 $r(x-z)\geqslant 4$. 对式(30)取模16，有 $9^z\equiv 1(\bmod 16)$，得

$$z\equiv 0(\bmod 2).$$

因此方程(22)仅有解 $x=y=z=2$.

(C)　当 $k=12$ 时，$(a,b,c)=(25,312,313)$. 此时方程(1)成为

$$(25n)^x+(312n)^y=(313n)^z,\qquad x,y,z\in\mathbf{N}^*. \tag{31}$$

易知，方程(31)没有适合 $y>z>x$ 以及 $n>1$ 的解 (x,y,z,n). 设方程(31)有适合 $x>z>y$ 以及 $n>1$ 的解 (x,y,z,n). 由于 $b=2^3\cdot 3\cdot 13$，故 $n=2^r 3^s 13^t$ ($r,s,t\in\mathbf{N}^*$，$r+s+t\geqslant 1$)，于是式(31)可化为

$$313^z-25^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} 13^{t(x-z)}=2^{3y-r(z-y)} 3^{y-s(z-y)} 13^{y-t(z-y)}. \tag{32}$$

当 $r=s=0, t>0$ 时，由式(32)得 $y=t(z-y)$，且有

$$25^x 13^{t(x-z)}=313^z-24^y. \tag{33}$$

当 $r=t=0, s>0$ 时，由式(32)得 $y=s(z-y)$，且有

$$25^x 3^{s(x-z)}=313^z-104^y. \tag{34}$$

当 $s=t=0, r>0$ 时，由式(32)得 $3y=r(z-y)$，且有

$$25^x 2^{r(x-z)}=313^z-39^y. \tag{35}$$

当 $r=0, s>0, t>0$ 时，由式(32)得 $y=s(z-y)=t(z-y)$，且有

$$25^x 3^{s(x-z)} 13^{t(x-z)}=313^z-8^y. \tag{36}$$

当 $s=0, r>0, t>0$ 时，由式(32)得 $3y=r(z-y), y=t(z-y)$，且有

$$25^x 2^{r(x-z)} 13^{t(x-z)}=313^z-3^y. \tag{37}$$

当 $t=0, r>0, s>0$ 时，由式(32)得 $3y=r(z-y), y=s(z-y)$，且有

$$25^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)}=313^z-13^y. \tag{38}$$

当$r>0,s>0,t>0$时，由式(32)得$3y=r(z-y),y=s(z-y)=t(z-y)$，且有

$$25^x2^{r(x-z)}3^{s(x-z)}13^{t(x-z)}=313^z-1. \tag{39}$$

若式(36)~(38)成立，则由$(313|5)=(8|5)=(3|5)=(13|5)=-1$结合定理1的条件(ii)知，方程(31)没有适合$x>z>y$以及$n>1$的解$(x,y,z,n)$. 再根据定理1的条件(i)和(iii)，只需证式(33)~(35)中$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$和式(39)中$z\equiv 0(\bmod 2)$时，方程(31)没有适合$x>z>y$以及$n>1$的解$(x,y,z,n)$即可。

若式(33)成立，则对式(33)取模13，有$1\equiv(-2)^y(\bmod 13)$，得$y\equiv 0(\bmod 12)$. 再对式(33)取模5，有$3^z\equiv(-1)^y\equiv 1(\bmod 5)$，得$z\equiv 0(\bmod 4)$. 故$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(34)成立，则对式(34)取模3，有$1\equiv(-1)^y(\bmod 3)$，得$y\equiv 0(\bmod 2)$. 再对式(34)取模5，有$3^z\equiv(-1)^y\equiv 1(\bmod 5)$，得$z\equiv 0(\bmod 4)$. 故$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(35)成立，则当$r=1$时，$z=4y$. 此时式(35)成为$25^x2^{x-4y}=313^{4y}-39^y$. 易知$347|(313^4-39)$，故$347|(313^{4y}-39^y)$，而$347\nmid 25^x2^{x-4y}$，所以$r\geqslant 2$. 对式(35)取模4，有$1\equiv(-1)^y(\bmod 4)$，得$y\equiv 0(\bmod 2)$. 再对式(35)取模5，有$3^z\equiv(-1)^y\equiv 1(\bmod 5)$，得$z\equiv 0(\bmod 4)$. 故$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(39)成立，则对式(39)取模5，有$3^z\equiv 1(\bmod 5)$，得$z\equiv 0(\bmod 4)$，当然有$z\equiv 0(\bmod 2)$.

因此方程(31)仅有解$x=y=z=2$.

（D） 当$k=13$时，$(a,b,c)=(27,364,365)$. 此时方程(1)成为

$$(27n)^x+(364n)^y=(365n)^z,\quad x,y,z\in\mathbf{N}^*. \tag{40}$$

易知，方程(40)没有适合$y>z>x$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 设方程(40)有适合$x>z>y$以及$n>1$的解(x,y,z,n). 由于$b=2^2\cdot 7\cdot 13$，故$n=2^r7^s13^t$（$r,s,t\in\mathbf{N}^*$，$r+s+t\geqslant 1$），于是方程(40)可化为

$$365^z-27^x2^{r(x-z)}7^{s(x-z)}13^{t(x-z)}=2^{2y-r(z-y)}7^{y-s(z-y)}13^{y-t(z-y)}. \tag{41}$$

当$r=s=0,t>0$时，由式(41)得$y=t(z-y)$，且有

$$27^x13^{t(x-z)}=365^z-28^y. \tag{42}$$

当$r=t=0,s>0$时，由式(41)得$y=s(z-y)$，且有

$$27^x7^{s(x-z)}=365^z-52^y. \tag{43}$$

当$s=t=0,r>0$时，由式(41)得$2y=r(z-y)$，且有

$$27^x2^{r(x-z)}=365^z-91^y. \tag{44}$$

当$r=0,s>0,t>0$时，由式(41)得$y=s(z-y)=t(z-y)$，且有

$$27^x7^{s(x-z)}13^{t(x-z)}=365^z-4^y. \tag{45}$$

当$s=0,r>0,t>0$时，由式(41)得$2y=r(z-y),y=t(z-y)$，且有

$$27^x2^{r(x-z)}13^{t(x-z)}=365^z-7^y. \tag{46}$$

当$t=0,r>0,s>0$时，由式(41)得$2y=r(z-y),y=s(z-y)$，且有

$$27^x2^{r(x-z)}7^{s(x-z)}=365^z-13^y. \tag{47}$$

当$r>0,s>0,t>0$时，由式(41)得$2y=r(z-y),y=s(z-y)=t(z-y)$，且有

$$27^x2^{r(x-z)}7^{s(x-z)}13^{t(x-z)}=365^z-1. \tag{48}$$

根据定理1的条件(i)和(iii)，只需证式(42)~(44),(46)~(47)中$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$和式(45),式(48)中$z\equiv 0(\bmod 2)$时，方程(40)没有适合$x>z>y$以及$n>1$的解$(x,y,z,n)$即可。

若式(42)成立，则对式(42)取模3，有$(-1)^z\equiv 1(\bmod 3)$，得$z\equiv 0(\bmod 2)$. 对式(42)取模13，有$1\equiv 2^y(\bmod 13)$,得$y\equiv 0(\bmod 12)$.故$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(43)成立，则对式(42)取模3，有$(-1)^z\equiv 1(\bmod 3)$，得$z\equiv 0(\bmod 2)$. 对式(43)取模7，有$1\equiv 3^y(\bmod 7)$,得$y\equiv 0(\bmod 6)$.故$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(44)成立，则对式(44)取模3，有$(-1)^z\equiv 1(\bmod 3)$，得$z\equiv 0(\bmod 2)$.

当$r=1$时，$z=3y$. 此时式(44)成为$27^x2^{x-3y}=365^{3y}-91^y$. 易知$31|(365^3-91)$，故$31|(365^{3y}-91^y)$，而$31\nmid 27^x2^{x-3y}$，所以$r\geqslant 2$. 对式(44)取模4，有$1\equiv(-1)^y(\bmod 4)$，得$y\equiv 0(\bmod 2)$. 故$z\equiv y\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(45)成立，则对式(45)取模3，有$(-1)^z\equiv 1(\bmod 3)$，得$z\equiv 0(\bmod 2)$.

若式(46)成立，则对式(46)取模 3，有 $(-1)^z \equiv 1 \pmod 3$，得 $z \equiv 0 \pmod 2$. 对式(46)取模 13，有 $1 \equiv 7^y \pmod{13}$. 由Legendre符号的性质得 $1 = (7|13)^y = (-1)^y$，即 $y \equiv 0 \pmod 2$. 故 $z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$.

若式(47)成立，则对式(47)取模 3，有 $(-1)^z \equiv 1 \pmod 3$，得 $z \equiv 0 \pmod 2$. 对式(47)取模 7，有 $1 \equiv (-1)^y \pmod 7$，得 $y \equiv 0 \pmod 2$. 故 $z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$.

若式(48)成立，则对式(48)取模3，有 $(-1)^z \equiv 1 \pmod 3$，得 $z \equiv 0 \pmod 2$.

因此方程(40)仅有解 $x = y = z = 2$.

（E） 当 $k = 14$ 时，$(a, b, c) = (29, 420, 421)$. 此时方程(1)成为

$$(29n)^x + (420n)^y = (421n)^z, \quad x, y, z \in \mathbf{N}^*. \tag{49}$$

易知，方程(49)没有适合 $y > z > x$ 以及 $n > 1$ 的解 (x, y, z, n). 设方程(49)有适合 $x > z > y$ 以及 $n > 1$ 的解 (x, y, z, n). 由于 $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$，故 $n = 2^r 3^s 5^t 7^w$ （$r, s, t, w \in \mathbf{N}^*$，$r + s + t + w \geqslant 1$），于是方程(49)可化为

$$421^z - 29^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} 5^{t(x-z)} 7^{w(x-z)} = 2^{2y - r(z-y)} 3^{y - s(z-y)} 5^{y - t(z-y)} 7^{y - w(z-y)}. \tag{50}$$

当 $r = s = t = 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $y = w(z - y)$，且有

$$29^x 7^{w(x-z)} = 421^z - 60^y. \tag{51}$$

当 $r = s = w = 0, t > 0$ 时，由式(50)得 $y = t(z - y)$，且有

$$29^x 5^{t(x-z)} = 421^z - 84^y. \tag{52}$$

当 $r = w = t = 0, s > 0$ 时，由式(50)得 $y = s(z - y)$，且有

$$29^x 3^{s(x-z)} = 421^z - 140^y. \tag{53}$$

当 $s = t = w = 0, r > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} = 421^z - 105^y. \tag{54}$$

当 $r = s = 0, t > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $y = t(z - y) = w(z - y)$，且有

$$29^x 5^{t(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 12^y. \tag{55}$$

当 $r = t = 0, s > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $y = s(z - y) = w(z - y)$，且有

$$29^x 3^{s(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 20^y. \tag{56}$$

当 $r = w = 0, s > 0, t > 0$ 时，由式(50)得 $y = s(z - y) = t(z - y)$，且有

$$29^x 3^{s(x-z)} 5^{t(x-z)} = 421^z - 28^y. \tag{57}$$

当 $s = t = 0, r > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = w(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 15^y. \tag{58}$$

当 $s = w = 0, r > 0, t > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = t(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 5^{t(x-z)} = 421^z - 21^y. \tag{59}$$

当 $t = w = 0, r > 0, s > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = s(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} = 421^z - 35^y. \tag{60}$$

当 $r = 0, s > 0, t > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $y = s(z - y) = t(z - y) = w(z - y)$，且有

$$29^x 3^{s(x-z)} 5^{t(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 4^y. \tag{61}$$

当 $s = 0, r > 0, t > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = t(z - y) = w(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 5^{t(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 3^y. \tag{62}$$

当 $t = 0, r > 0, s > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = s(z - y) = w(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 5^y. \tag{63}$$

当 $w = 0, r > 0, s > 0, t > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = s(z - y) = t(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} 5^{t(x-z)} = 421^z - 7^y. \tag{64}$$

当 $r > 0, s > 0, t > 0, w > 0$ 时，由式(50)得 $2y = r(z - y), y = s(z - y) = t(z - y) = w(z - y)$，且有

$$29^x 2^{r(x-z)} 3^{s(x-z)} 5^{t(x-z)} 7^{w(x-z)} = 421^z - 1. \tag{65}$$

若式(51)~(52)，(55)，(58)~(59)，(62)成立，则由 $(421|29) = (60|29) = (84|29) = (12|29) = (15|29) = (21|29) = (3|29) = -1$. 结合定理1的条件(ii)知，方程(49)没有适合 $x > z > y$ 以及 $n > 1$ 的解 (x, y, z, n). 再

根据定理1的条件(i)和(iii)，只需证式(53)~(54)，(56)~(57)，(60)，(63)~(64)中$z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$和式(61)，式(65)中$z \equiv 0 \pmod 2$时，方程(49)没有适合$x > z > y$以及$n > 1$的解$(x, y, z, n)$即可。

若式(53)成立，则对式(53)取模3，有$1 \equiv (-1)^y \pmod 3$，得$y \equiv 0 \pmod 2$. 对式(53)取模29，有$15^z \equiv (-5)^y \pmod{29}$. 由Legendre符号的性质得$(-1)^z = (15|29)^z = (-5|29)^y = 1$，故$z \equiv 0 \pmod 2$. 于是$z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$.

若式(54)成立，则对式(54)取模4，有$2^{r(x-z)} \equiv 0 \pmod 4$，故$r(x-z) \geqslant 2$. 假定$r(x-z) = 2$，则$r = 1$或2. 当$r = 1$时，$z = 3y$. 因$18\,654\,589 | (421^3 - 105)$，而$18\,654\,589 \nmid 29^x 2^{r(x-z)}$，故式(54)不成立。当$r = 2$时，$z = 2y$. 因$11\,071 | (421^2 - 105)$，而$11\,071 \nmid 29^x 2^{r(x-z)}$，故式(54)不成立。从而$r(x-z) \geqslant 3$. 对式(54)取模8，有$(-3)^z \equiv 1 \pmod 8$，得$z \equiv 0 \pmod 2$. 再对式(54)取模29，有$15^z \equiv 18^y \pmod{29}$. 由Legendre符号的性质得$1 = (-1)^z = (15|29)^z = (18|29)^y = (-1)^y$，故$y \equiv 0 \pmod 2$. 于是$z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$.

若式(56)，(60)，(63)成立，则分别对式(56)，(60)，(63)取模3和模29，类似式(53)的讨论知$z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$.

若式(57)，(64)成立，则分别对式(57)，(64)取模5和模29，类似式(53)的讨论知$z \equiv y \equiv 0 \pmod 2$.

若式(61)成立，则对式(61)取模29，有$15^z \equiv 4^y \pmod{29}$. 由Legendre符号的性质得$(-1)^z = (15|29)^z = (4|29)^y = 1$，故$z \equiv 0 \pmod 2$.

若式(65)成立，则对式(65)取模29，类似式(61)的讨论知$z \equiv 0 \pmod 2$.

因此方程(49)仅有解$x = y = z = 2$. 推论1得证。

参考文献：

[1] JEŚMANOWICZ L. Several remarks on Pythagorean numbers [J]. Wiad Mat，1955，1(2)：196-202.

[2] CHENG Z，SUN C F，DU X N. On the diophantine equation $(20n)^x + (21n)^y = (29n)^z$ [J]. Math Appl，2013，26(1)：129-133.

[3] DENG M J，COHEN G L. On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples [J]. Bull Aust Math Soc，1998，57(3)：515-524.

[4] 邓谋杰. 关于丢番图方程$(13n)^x + (84n)^y = (85n)^z$[J]. 黑龙江农垦师专学报，1999(3)：40-41.

[5] DENG M J. A note on the Diophantine equation $(na)^x + (nb)^y = (nc)^z$ [J]. Bull Aust Math Soc，2014，89(2)：316-321.

[6] 管训贵. 关于丢番图方程$(na)^x + (nb)^y = (nc)^z$ ($c = 181, 845$)的解[J]. 东北师大学报(自然科学版)，2021，53(2)：8-13.

[7] LE M H. A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples [J]. Bull Aust Math Soc，1999，59(3)：477-480.

[8] 马米米，吴建东. 关于丢番图方程$(65n)^x + (72n)^y = (97n)^z$[J]. 南京师大学报(自然科学版)，2014，37(4)：28-30+40.

[9] MIYAZAKI T. A remark on Jeśmanowicz' conjecture for non-coprimality case [J]. Acta Math Sin (Engl Ser)，2015，31(8)：1225-1260.

[10] SIERPIŃSKI W. On the equation $3^x + 4^y = 5^z$ [J]. Wiad Mat，1955，1(2)：194-195.

[11] SUN C F，CHENG Z. A note on the Jeśmanowicz' conjecture [J]. J Math(Wuhan)，2013，33(5)：788-794.

[12] SUN C F，CHENG Z. A conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples [J]. Adv Math(China)，2014，43(2)：267-275.

[13] 杨海，任荣珍，付瑞琴. 关于商高数的Jeśmanowicz猜想[J]. 数学杂志，2017，37(3)：506-512.

[14] YANG Z J，TANG M. On the Diophantine equation $(8n)^x + (15n)^y = (17n)^z$ [J]. Bull Aust Math Soc，2012，86(2)：348-352.

[15] DEM'JANENKO V A. On Jeśmanowicz' problem for Pythagorean numbers [J]. Izv Vyssh Uchebn Zaved Mat，1965，48(5)：52-56.

[16] 管训贵. 初等数论[M]. 2版. 合肥：中国科学技术大学出版社，2016.

[17] MORDELL L J. Diophantine equations [M]. London：Academic Press，1969.

（责任编辑　冯兆永）